

Introducción a la Estadística y Probabilidad

Tema 5. Teoría de la Probabilidad

MANUEL MONGE, Ph.D.

Departamento de Economía Aplicada y Métodos Cuantitativos

Facultad de Derecho, Economía y Gobierno

Universidad Francisco de Vitoria

1. Contenidos
2. Introducción
3. ¿Qué es la probabilidad?
4. Métodos para asignar probabilidades

Reglas de adición para calcular probabilidades

Regla de la multiplicación para calcular probabilidades

7. Diagramas de árbol

8. Teorema de Bayes

9. Principios de conteo

1. Contenidos

1. Contenidos

- Definir los términos probabilidad, experimento, evento y resultado.
- Asignar probabilidades utilizando el método clásico, empírico o subjetivo.
- Calcular probabilidades mediante las reglas de la adición.
- Calcular probabilidades mediante las reglas de multiplicación.
- Calcular probabilidades por medio de una tabla de contingencia.
- Calcular probabilidades con base en el teorema de Bayes.
- Determinar el número de resultados por medio del principio de conteo.

2. Introducción

2. Introducción

- Hasta el tema 4, hemos estado viendo conceptos de estadística descriptiva con el fin de resumir datos recabados de eventos pasados.
- Ahora se presenta la segunda faceta de la estadística.
- Recibe el nombre de **inferencia estadística** o **estadística inferencial**.
- Consiste en calcular la probabilidad de que algo ocurra en el futuro.
- La **teoría de la probabilidad** (también conocida como la ciencia de la incertidumbre), resulta útil para hacer esta evaluación.
- Su aplicación permite a quien toma decisiones analizar los riesgos y reducirlos al mínimo (ej. al lanzar al mercado un nuevo producto).

3. ¿Qué es la probabilidad?

3. ¿Qué es la probabilidad?

Probabilidad

Valor entre cero y uno, inclusive, que describe la posibilidad relativa (oportunidad o casualidad) de que un evento suceda.

- Cuanto más se aproxime una probabilidad a 0 (cero), más improbable será que el evento suceda.
- Cuanto más próxima se encuentre la probabilidad a 1, más seguro será que suceda.

A veces, la probabilidad de un evento se expresa utilizando el término oportunidades o posibilidades.

Por ejemplo, si alguien dice que las oportunidades son 'cinco a dos' de que un evento suceda, significa que en un total de siete ensayos ($5+2$), el evento ocurrirá cinco veces y no sucederá dos veces. Así, utilizando las oportunidades se puede calcular la probabilidad de que el evento ocurra como $5/(5 + 2)$ o $5/7$.

Así, las oportunidades o posibilidades a favor de un evento son x a y , la probabilidad del evento es $x/(x + y)$.

3. ¿Qué es la probabilidad?

En el estudio de la probabilidad se utilizan tres palabras clave:

Experimento

Proceso que induce a que ocurra una y solo una de varias posibles observaciones.

Resultado

Ocurrencia particular de un experimento.

Evento

Conjunto de uno o más resultados de un experimento.

3. ¿Qué es la probabilidad?

Ejemplo:

		
Experimento	Lanzar un dado	Listado del número de miembros de la junta directiva de las compañías de <i>Fortune</i> 500, mayores de 60 años
Todos los posibles resultados	Se observa un 1 Se observa un 2 Se observa un 3 Se observa un 4 Se observa un 5 Se observa un 6	Ninguno tiene más de 60 Uno tiene más de 60 Dos tienen más de 60 ... 29 tienen más de 60 48 tienen más de 60 ...
Algunos posibles eventos	Se observa un número par Se observa un número mayor que 4 Se observa un 3 o un número menor	Más de 13 tienen más de 60 Menos de 20 tienen más de 60

En el caso del experimento del lanzamiento de un dado,

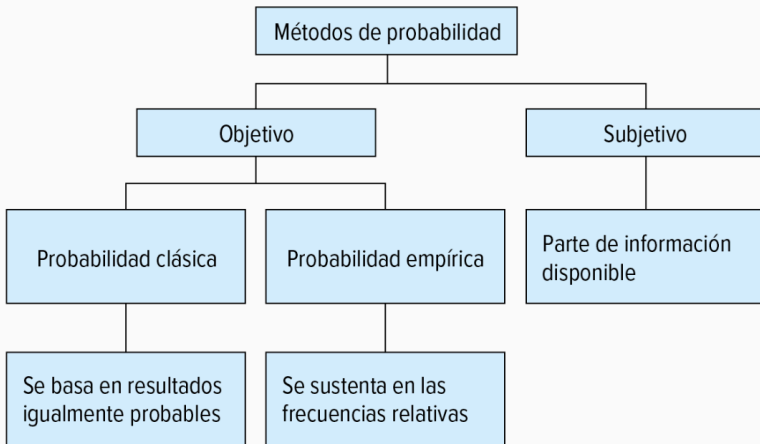
- Hay 6 posibles resultados.
- Existen varios posibles eventos.

4. Métodos para asignar probabilidades

4. Métodos para asignar probabilidades

- En esta sección se describen tres formas de asignar una probabilidad a un evento: **clásica**, **empírica** y **subjetiva**.
- Los métodos clásico y empírico son objetivos y se basan en datos e información.
- El método subjetivo se basa en la creencia o estimación de una persona acerca de la probabilidad de un evento.

4. Métodos para asignar probabilidades



4. Métodos para asignar probabilidades

Probabilidad Clásica

- Parte del supuesto de que los resultados de un experimento son *igualmente posibles*.
- ¿Dónde se aplica? Juegos de azar (cartas, dados, lotería, etc.)
- De acuerdo con el punto de vista clásico, la probabilidad de un evento se calcula:

$$\text{Probabilidad de un evento} = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de posibles resultados}}$$

4. Métodos para asignar probabilidades

Ejemplo

Considere el experimento de lanzar un dado. ¿Cuál es la probabilidad del evento 'cae un número par'?

Los posibles resultados son:

Un punto		Cuatro puntos	
Dos puntos		Cinco puntos	
Tres puntos		Seis puntos	

Hay tres resultados 'favorables' (dos, cuatro y seis) en el conjunto de seis resultados igualmente posibles. Por consiguiente,

$$\text{Probabilidad de un número par} = \frac{3}{6} = 0,5$$

4. Métodos para asignar probabilidades

Otros conceptos de conjuntos

- **Mutuamente excluyente:** el hecho de que un evento se presente significa que ninguno de los demás puede ocurrir al mismo tiempo (ej. la variable 'género' da origen a resultados mutuamente excluyentes: hombre y mujer).
- **Colectivamente exhaustivo:** por lo menos uno de los eventos debe ocurrir cuando se lleva a cabo un experimento. (ej. si un experimento incluye un conjunto de eventos con todo tipo de resultados posibles, como los eventos 'un número par' y 'un número impar' en el experimento del lanzamiento del dado).

Si el conjunto de eventos es colectivamente exhaustivo y los eventos son mutuamente excluyentes, la suma de probabilidades es 1.

4. Métodos para asignar probabilidades

Probabilidad Empírica

- Segundo tipo de probabilidad objetiva.
- Se basa en el número de veces que ocurre el evento como proporción del número de intentos conocidos.
- Por tanto, la probabilidad de un evento representa una fracción de los sucesos similares en el pasado.
- La fórmula para determinar la probabilidad empírica es:

$$\text{Probabilidad empírica} = \frac{\text{Número de veces que el evento ocurre}}{\text{Número total de observaciones}}$$

- El método empírico de la probabilidad se basa en la llamada **ley de los grandes números** (en una gran cantidad de intentos, la probabilidad empírica de un evento se aproximará a su probabilidad real).
- Por tanto, la clave para determinar de forma empírica consiste en que una mayor cantidad de observaciones proporcionará un cálculo más preciso de la probabilidad.

4. Métodos para asignar probabilidades

Ejemplo - Ley de los grandes números

- Supongamos que lanzamos una moneda.
- El resultado de cada lanzamiento es cara o cruz.
- Si lanzamos la moneda una sola vez, la **probabilidad empírica** de las caras es cero o uno.
- Si lanzamos la moneda una gran cantidad de veces, la probabilidad del resultado de las caras se aproximará a 0,5.
- Veámoslo en la siguiente tabla:

Número de ensayos	Número de caras	Frecuencia relativa de las caras
1	0	.00
10	3	.30
50	26	.52
100	52	.52
500	236	.472
1 000	494	.494
10 000	5 027	.5027

- La primera columna indica el número de veces que lanzamos la moneda; la segunda columna indica el número de veces que salen caras; la tercera columna indica la frecuencia relativa de las caras (es decir, número de caras dividido entre número de ensayos).

4. Métodos para asignar probabilidades

Ejemplo - Probabilidad Empírica

El 1 de febrero de 2003 explotó el transbordador espacial Columbia, que fue el segundo desastre en 113 misiones espaciales de la NASA. Con base en esta información, ¿cuál es la probabilidad de que una futura misión concluya con éxito?

$$\text{Probabilidad de un vuelo exitoso} = P(A) = \frac{\text{Número de vuelos exitosos}}{\text{Número total de vuelos}}$$

$$P(A) = \frac{113-2}{113} = \frac{111}{113} = 0,98$$

Este resultado sirve como aproximación de la probabilidad. En otras palabras, por experiencia, la probabilidad que una futura misión del transbordador espacial concluya con éxito es de 0,98.

4. Métodos para asignar probabilidades

Probabilidad Subjetiva

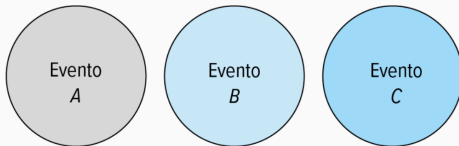
- Es posible aproximar la probabilidad en forma subjetiva si se cuenta con poca o ninguna experiencia o información.
- Es decir, un individuo evalúa las opiniones e información disponibles y, luego, calcula o asigna la probabilidad.

Reglas de adición para calcular probabilidades

5. Reglas de adición para calcular probabilidades

Regla especial de la adición

- Los eventos deben ser **mutuamente excluyentes** (es decir, cuando un evento ocurre, ninguno de los demás eventos puede ocurrir al mismo tiempo).



- Si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes, la regla especial de la adición establece que la probabilidad de que ocurra uno u otro es igual a la suma de sus probabilidades.
- Esta regla se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

5. Reglas de adición para calcular probabilidades

Ejemplo

En un supermercado encontramos bolsas de patatas para asar al microondas. Encontramos que la gran mayoría de ellas contienen el peso correcto, sin embargo al haber patatas de mayor o menor tamaño puede ocurrir que un paquete pesa más o menos. Una revisión de 4000 paquetes que se llenaron hace unos días arrojó los siguientes datos:

Peso	Evento	Número de paquetes	Probabilidad de que ocurra el evento
Menos peso	A	100	.025
Peso satisfactorio	B	3 600	.900
Más peso	C	300	.075
		4 000	1.000

← $\frac{100}{4\,000}$

¿Cuál es la probabilidad de que un paquete en particular pese menos o más?

El resultado 'pesa menos' es el evento A; el resultado 'pesa más' es el evento C. Al aplicar la regla especial de la adición se tiene:

$$P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C) = 0,025 + 0,075 = 0,10$$

Aclaración: Observe que los eventos son mutuamente excluyentes, lo cual significa que un paquete no puede pesar menos, tener el peso satisfactorio y pesar más al mismo tiempo. También son colectivamente exhaustivos, es decir, que un paquete seleccionado debe pesar menos, tener un peso satisfactorio o pesar más.

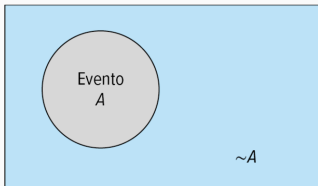
5. Reglas de adición para calcular probabilidades

Regla de complemento

La probabilidad de que una bolsa de patatas pese menos, $P(A)$, más la probabilidad de que no sea una bolsa con menos peso, $P(\sim A)$, que se lee *no A*, debe ser, por lógica, igual a 1.

Esta expresión puede reformularse de la siguiente manera:

$$\text{Regla del Complemento} = P(A) = 1 - P(\sim A)$$



La **regla del complemento** se emplea para determinar la probabilidad de que un evento ocurra restando de 1 la probabilidad de un evento que no ha ocurrido.

Esta regla es útil porque a veces es más fácil calcular la probabilidad de que un evento suceda determinando la probabilidad de que no suceda y restando el resultado de 1.

5. Reglas de adición para calcular probabilidades

Ejemplo

Refiriéndonos al ejemplo de las bolsas de patatas, la probabilidad de que una bolsa de patatas pese menos de 0,025 y la probabilidad de que pese más de 0,075.

Aplique la regla del complemento para demostrar que la probabilidad de una bolsa con un peso satisfactorio es de 0,900.

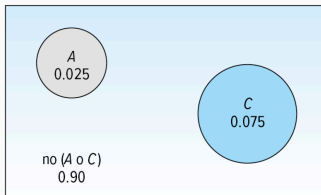
La probabilidad de que la bolsa no tenga un peso satisfactorio es igual a la suma de la probabilidad de tener mayor peso más la de tener menos.

Es decir, $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = 0,025 + 0,075 = 0,100$

La bolsa tiene un peso satisfactorio si no tiene menos ni más peso; así que

$P(B) = 1 - [P(A) + P(C)] = 1 - [0,025 + 0,075] = 0,900$.

Gráficamente quedaría:



5. Reglas de adición para calcular probabilidades

Regla general de la adición

- La regla general de la adición se usa cuando los eventos/experimentos no son mutuamente excluyentes.
- Por tanto, la probabilidad de que dos o más eventos sucedan simultáneamente se denomina **probabilidad conjunta**.
- Para calcular esta probabilidad utilizamos la siguiente fórmula:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

- En el caso de la expresión $P(A \text{ o } B)$, la letra 'o' sugiere que puede ocurrir A o puede ocurrir B. Esto también incluye la posibilidad de que A y B ocurran.
- Al comparar las reglas general y especial de la adición, la diferencia que importa consiste en determinar si los eventos son mutuamente excluyentes. Si lo son, entonces la probabilidad conjunta $P(A \text{ y } B)$ es 0 (cero) y se podría aplicar la regla especial de la adición.
- De lo contrario, tome en cuenta la probabilidad conjunta y aplique la regla general de la adición.

5. Reglas de adición para calcular probabilidades

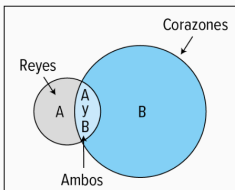
Ejemplo

¿Cuál es la probabilidad de que una carta elegida al azar de una baraja convencional sea rey o de corazones?

Carta	Probabilidad	Explicación
Rey	$P(A) = 4/52$	4 reyes en una baraja de 52 cartas
Corazones	$P(B) = 13/52$	13 corazones en una baraja de 52 cartas
Rey de corazones	$P(A \text{ y } B) = 1/52$	1 rey de corazones en una baraja de 52 cartas

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B) = 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52 = 0,3077$$

Si representamos estos resultados, que no son mutuamente excluyentes:



Regla de la multiplicación para calcular probabilidades

6. Regla de la multiplicación para calcular probabilidades

- La regla de multiplicación se aplica cuando 2 o más eventos ocurren de forma simultánea.
- La regla especial de multiplicación hace referencia a los eventos (A y B) que son **independientes**.
- **Independencia**: si un evento ocurre, no tiene ningún efecto sobre la probabilidad de que otro evento acontezca.
- La **regla especial de la multiplicación** sería:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

6. Regla de la multiplicación para calcular probabilidades

Ejemplo

Por experiencia, la empresa de neumáticos Michelin sabe que la probabilidad de que una llanta XB-70 rinde 60.000km antes de quedar lisa o falle es de 0,95. A cualquier llanta que no dure los 60.000km se le hacen arreglos. Usted adquiere cuatro llantas XB-70. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro llantas tengan una duración de al menos 60.000km?

$$(0,95) \cdot (0,95) \cdot (0,95) \cdot (0,95) = 0,8145$$

6. Regla de la multiplicación para calcular probabilidades

- La regla general de la multiplicación hace referencia a los eventos que **no son independientes**, es decir **son dependientes**.
- Por tanto, definimos la **probabilidad condicional** como la probabilidad de que un evento en particular ocurra, dado que otro evento haya acontecido.

$$P(A \text{ y } B) = P(A)P(B|A)$$

6. Regla de la multiplicación para calcular probabilidades

Ejemplo

La junta directiva de Tarbell Industries consta de 8 hombres y cuatro mujeres. Un comité de cuatro miembros será elegido al azar para llevar a cabo una búsqueda, en todo el país, del nuevo presidente de la compañía.

- ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro miembros del comité de búsqueda sean mujeres?

$$\left(\frac{4}{12}\right) \cdot \left(\frac{3}{11}\right) \cdot \left(\frac{2}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{24}{11880} = 0,002$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro miembros del comité de búsqueda sean hombres?

$$\left(\frac{8}{12}\right) \cdot \left(\frac{7}{11}\right) \cdot \left(\frac{6}{10}\right) \cdot \left(\frac{5}{9}\right) = \frac{1680}{11880} = 0,1414$$

- ¿Las probabilidades de los eventos descritos en los puntos anteriores suman 1? Explique su respuesta.

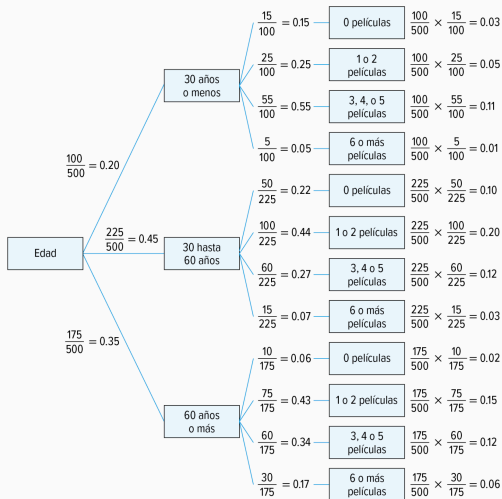
No , porque existen otras probabilidades, como tres mujeres y un hombre.

7.Diagramas de árbol

7.Diagramas de árbol

- Un diagrama de árbol es una gráfica que ayuda en la organización y en el cálculo de probabilidades en problemas con varios pasos/etapas.
- Cada etapa del problema está representado por una rama del árbol.
- Cada rama está etiquetada con las probabilidades.

7. Diagramas de árbol



Ejemplo de diagrama de árbol que muestra la edad y el número de películas vistas.

8. Teorema de Bayes

8. Teorema de Bayes

- El siglo XVIII, el reverendo Thomas Bayes, un ministro presbiteriano inglés, planteó esta pregunta: *‘¿Dios realmente existe?’*.
- Dado su interés en las matemáticas, intentó crear una fórmula para llegar a la probabilidad de que Dios existiera con base en la evidencia disponible de la Tierra.
- Más tarde, Pierre-Simon Laplace perfeccionó el trabajo de Bayes y le dio el nombre de **Teorema de Bayes**, que es el siguiente:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)}$$

- **Probabilidad A Priori.** Es la probabilidad inicial que está basada en el nivel de información actual.
- **Probabilidad A Posteriori.** Es la probabilidad que se revisa a partir de información adicional.

7. Teorema de Bayes

Ejemplo

- Suponga que un 5 % de la población de Umen (país ficticio del Tercer Mundo), tiene una enfermedad propia del país.
- Sea A_1 el evento 'padece la enfermedad' y A_2 el evento 'no padece la enfermedad'.
- Por lo tanto, si selecciona al azar a una persona de Umen, la probabilidad de que el individuo elegido padezca la enfermedad es de 0,05 o $P(A_1) = 0,05$. Esta probabilidad recibe el nombre de **probabilidad a priori**. Se le da este nombre porque la probabilidad se asigna antes de obtener los datos empíricos.
- Por ende, la probabilidad *a priori* de que una persona no padezca la enfermedad es de 0,95 [$P(A_2) = 0,95$], que se calcula mediante la resta $1 - 0,05$.
- Existe una técnica de diagnóstico para detectar la enfermedad, pero no es muy precisa. Sea B el evento 'la prueba revela la presencia de la enfermedad'. Suponga que la evidencia histórica muestra que si una persona padece realmente la enfermedad, la probabilidad de que la prueba indique su presencia es de 0,90.
- De acuerdo con las definiciones de probabilidad condicional que se establecieron en este tema, dicho enunciado se expresa de la siguiente manera:

$$P(B|A_1) = 0,90$$

- Suponga que la probabilidad de que la prueba indique la presencia de la enfermedad en una persona que en realidad no la padece es de 0,15.

$$P(B|A_2) = 0,15$$

- Elija al azar a una persona de Umen y aplique la prueba. Los resultados indican que la enfermedad está presente.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona en realidad la padezca? Lo que desea saber, en forma simbólica, es $P(A_1|B)$, que se interpreta de la siguiente manera: $P(\text{padece la enfermedad} | \text{la prueba resulta positiva})$. La probabilidad $P(A_1|B)$ recibe el nombre de **probabilidad a posteriori**.
- Con la ayuda del Teorema de Bayes se determina la probabilidad *a posteriori*:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)} = \frac{(0,05) \cdot (0,90)}{(0,05) \cdot (0,90) + (0,95) \cdot (0,15)} = \frac{0,0450}{0,1875} = 0,24$$

7. Teorema de Bayes

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)} = \frac{(0,05) \cdot (0,90)}{(0,05) \cdot (0,90) + (0,95) \cdot (0,15)} = \frac{0,0450}{0,1875} = 0,24$$

- Así que la probabilidad de que una persona padezca la enfermedad, dado que la prueba fue positiva, es de 0,24.
- ¿Cómo se interpreta el resultado?
- Si se selecciona al azar a una persona de la población, la probabilidad de que esté enferma es de 0,05.
- Si se le somete a la prueba y resulta positiva, la probabilidad de que la persona padezca realmente la enfermedad se incrementa cinco veces, de 0,05 a 0,24.
- Con la notación anterior, los cálculos del problema de Umen se resumen en la siguiente tabla:

Evento, A_i	Probabilidad a priori, $P(A_i)$	Probabilidad condicional, $P(B A_i)$	Probabilidad conjunta, $P(A_i \text{ y } B)$	Probabilidad a posteriori, $P(A_i B)$
Padece la enfermedad, A_1	0.05	0.90	0.0450	$0.0450/0.1875 = 0.24$
No padece la enfermedad, A_2	0.95	0.15	<u>0.1425</u>	$0.1425/0.1875 = 0.76$
			$P(B) = 0.1875$	1.00

9. Principios de conteo

9. Principios de conteo

Fórmula de la multiplicación

Si hay m formas de hacer una cosa y n formas de hacer otra, hay $m \cdot n$ formas de hacer ambas.

9. Principios de conteo

Permutación

Se aplica para determinar el número posible de disposiciones cuando solo hay un grupo de objetos.

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

donde,

- n representa el total de objetos;
- r representa el total de objetos seleccionados.

9. Principios de conteo

Combinación

Si el orden de los objetos seleccionados no es importante, cualquier selección se denomina **combinación**. El número de combinaciones siempre es menor que el número de permutaciones.

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$